



TITLE:

階層ロジスティック方程式とその
応用：普及率の動的挙動のメカニズ
ム (力学系の作る集団ダイナミクス
：保存系・散逸系の枠組みを越えて
)

AUTHOR(S):

田代, 徹; 皆川, 紘恵; 千葉, 路子

CITATION:

田代, 徹 ...[et al]. 階層ロジスティック方程式とその応用：普及率の動的挙動のメカニズム (力学系の作る集団ダイナミクス：保存系・散逸系の枠組みを越えて). 数理解析研究所講究録 2013, 1827: 195-202

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194771>

RIGHT:

階層ロジスティック方程式とその応用 —普及率の動的挙動のメカニズム—

お茶の水女子大学・理学部物理学科 田代 徹 皆川 紘恵 千葉 路子

Tohru Tashiro Hiroe Minagawa and Michiko Chiba

Department of Physics, Ochanomizu University

1. はじめに

流行とは社会の中でどのように広まっていくのだろうか. 社会の構成員である私たちが意図しない形で流行は広まっていく. ごく少数の人間がひょっとしたら流行を起こそうと意図しているかもしれないが, 社会を構成する大部分の人間は流行を広げようとは考えていない. 出現した当初は真新しいものでも, いつの間にか私たちの身の回りで当たり前の存在になっていたりする. 時にして私たちの生活から消え失せてしまう場合もある. 例えばテレビが発明された当初は, 現代のように一家に複数台, あるいはワンセグを含めれば 1 人 1 台テレビを保有する時代が来るとは夢にも思わなかったろう. また CD が発明されたときには, まさかそれを外に持ち出して音楽を楽しむ時代が来るとは想像もしていなかった. そして時代は移り変わり, 今ではもっと手軽な iPod をはじめとした MP3 プレイヤーで私たちは音楽を楽しんでいる. これは物質中の原子・分子の相互作用からは想像もつかないような多様な相の変化が起こることに相通ずるといえるかもしれない. Buchanan の言葉を借りれば, 人類は言わば “the social atom” なのである [1].

我々は, 流行の発生を生み出す人間同士の相互作用 (コミュニケーション) とは何なのかを探りたい. もちろん, 流行を緻密に扱うためには, 他の沢山の要素も考慮していかなければならない. 例えば, ある商品が社会で広まるためには, 価格減少も大事な要素となる. 先に挙げたテレビでも, いつまでも発明された当初の価格のままであれば, これほどの速さで普及はしなかったであろう. 製品の製造コストが下がり, 価格が下がり, 庶民の手に入りやすい価格となって, Rogers 曰く相対的有利性が高まり [2], 我々にとって身近なものとなった. また操作性の向上も製品の普及には無視できない. MP3 プレイヤーが CD プレイヤーに置き換わったのは, その携帯性であり, 我々を煩わしい CD の入れ替えから解放し, CD よりも膨大な曲数を楽しめるようにしたことによる. 逆に言えば, 製品の機能の「複雑性はその普及速度と負の相関を持つ」[2].

ここではそういった要素は一切考えない. つまり, 商品の価格変動はない¹, 機能性も向上しない. 社会の中であるモノ²が流行していく様子を, 人同士のエッセンシャルなコミュニケーションから再現することを目指す.

科学の問題としてこの社会現象をモデリングする上では, 客観的な流行の指標となる (定量的な) データが無くてはならない. ここでは, 普及率を用いることにする. この時間変化は次のような普遍性を有している. Tarde の言葉を借りれば, 「最初は緩慢に進み, 次第に一定の割合で加速し速度を上げていくが, 最後には減速して止まる」[3]. すなわち, いわゆる S 字曲線を描く.

この動的変化をシンプルに解析するために, ロジスティック方程式の解, ロジスティック関数が今まで使われてきた. ロジスティック方程式とは以下の微分方程式で表現される.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a}{X} x(t) \{X - x(t)\} \quad (1)$$

¹ その価格は社会の構成員が無理なく購入できるほどのもの.

² これは商品のような実在の物だけでなく, 例えば流行語のような実在しない人間の行動様式も含めることにする.

この解

$$x(t) = \frac{X}{1 + \left\{ \frac{X}{x(0)} - 1 \right\} e^{-at}} \quad (2)$$

がロジスティック関数である。もし $x(0) < X$ であるならば、 $x(t)$ は 0 から X の間に存在し、さらにその関数形（ロジスティック曲線）はまさに S 字型である。それ故に $x(t)/X$ は普及率の変化を記述するのに非常に適している³。

よく知られているように、ロジスティック方程式は Verhulst によって、人口増加を記述する方程式として提案された [4-6]。しかし、当時は彼の研究の価値は見出されることはなかった。誕生からおよそ 100 年近くたって、Pearl と Reed はハエの個体数増加の研究でこの式を再発見し、1920 年にアメリカの人口増加の予測にロジスティック関数を使用した [7]。また Lotka も同じころ、人口増加のモデルとしてロジスティック方程式にたどり着いている [8]。彼らの仕事が Verhulst とロジスティック方程式の名前を表舞台に登場させるきっかけとなった。

技術革新の普及にロジスティック曲線を導入したのは Griliches である [9]。彼は雑種トウモロコシが農家でどのくらい使用されているか（普及率）について、その動的变化をロジスティック関数を用いて分析した。その後、普及率の動的变化がロジスティック方程式によって記述できることの数学的意味づけが初めて Mansfield によってなされた [10]。また Fisher と Pry が 2 つの品目（例えばマーガリンとバター）のシェアの移り変わりにロジスティック関数を利用した [11]。ロジスティック方程式とその解が技術革新の普及に使われだした黎明期はこのようにしてなされ、その後数多くの技術の広がりによってロジスティック方程式は使われてきている。ここ 10 年というところ、携帯電話の普及 [12-14]、PC の普及 [15-19]、家電の普及 [15, 20, 21]、エネルギー技術の革新 [22, 23]、情報技術の革新 [19]、酸素製鋼法の普及 [24] の記述にロジスティック方程式は使われてきている。

つまりたくさんの普及率の動的变化はロジスティック方程式で説明することができるのである。では、この背後にはどういった人と人とのコミュニケーションがあるのだろうか。この問いは決して自明なものではない。そこで、本論文ではまずそのコミュニケーションを明らかにする。我々の研究によると、ロジスティック方程式を用いたモデル（ロジスティックモデル）は次のようなコミュニケーションを前提としていることが明らかになった：「あるモノを所持している（受け入れている）人にまだそれを所持していない（受け入れていない）人が出会うと、すぐに所持しだす（受け入れる）」、つまり人々がまねをしていくことでそのモノとは社会の中で普及していくと、ロジスティックモデルでは考えられている。数値シミュレーションでこのようなコミュニケーションをする社会を再現すると、実際に普及率の変化がロジスティックモデルで記述されることが確認される。以上の議論は第 2 節でなされる。

これは確かに流行が伝搬していく様子を的確にとらえていると言える。しかしここで新たな疑問が浮かんでくる：「我々はそんなに簡単に人から影響をうけるだろうか？」。この問いが本論文の真の出発点となる。そこで我々はより自然なコミュニケーション、今まで何人そのモノを所持していた人に会ったかという記憶、をとり入れたモデルを考案する。これは第 3 節で議論される。

さらにこの新しいモデルを実際のデータに適用する。本論文では iPod の売り上げデータを採用することにする。その結果従来のモデル（すなわちロジスティックモデル）よりも我々のモデルの方が良く実データを再現することを示す。これは第 4 節でなされる。

2. まねする集団での普及率の変化

この節では、ロジスティック曲線で記述される普及率の動的变化が、どのような人と人との相互作用によってもたらされるかを明らかにし、それを数値シミュレーションによって確認する。

N 人の集団を考えよう。この集団に対して次のルールを定める：i) 初めに、これから流行するであろうモノを何人かがもっている ii) まだそのモノをもっていない人（non-adopter）がすでにもっている人（adopter）に出会うとすぐにそれを所持しだす iii) non-adopter は複数の adopter に影響を受けないし、adopter は複数の non-adopter に影響を与えない iv) adopter は所持したモノを手放さない。

このような集団の挙動をより定量的に記述するために、 $n \times n$ ($> N$) 個の正方格子の上に配置しよう。そこで人々は離散的な時間間隔 (Δt) の間に隣の格子に等確率で移動するものとする。iii) の

³ 普及率を解析する際には、フィッティングパラメータは a と $x(0)/X$ で十分であり、実にシンプルに解析できる。

ルールは, adopter と non-adopter が 1 つの格子をシェアするのは必ず 1 人づつとなることを要請している. すると, adopter もしくは non-adopter に出会う確率は, それぞれの人口に比例すると考えるのは極々自然なことである.

ここで, i 番目の時間ステップでの adopter, non-adopter の人口をそれぞれ P_i , Q_i としよう. その結果出会う確率は以下のようにかける:

$$\begin{cases} \text{probability to meet adopters at } i\text{th step} = \frac{P_i}{n^2} \\ \text{probability to meet non-adopters at } i\text{th step} = \frac{Q_i}{n^2} \end{cases} \quad (3)$$

ゆえに $(P_i/n^2) \times Q_i$ 人の non-adopter は次のステップで adopter になるので, 以下の漸化式が得られる:

$$P_{i+1} = P_i + \frac{P_i}{n^2} Q_i \quad (4)$$

$$Q_{i+1} = Q_i - \frac{P_i}{n^2} Q_i. \quad (5)$$

ここで次のような置き換えをおこなう.

$$P(t) = P(i \cdot \Delta t) \equiv P_i, \quad Q(t) = Q(i \cdot \Delta t) \equiv Q_i \quad (6)$$

そして時間と空間の連続化を $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ とすることで行う. ただしその際 $n^2 \Delta t$ を有限に保ち, この値を a/N としよう. すると先の漸化式は以下の微分方程式になる.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{a}{N} \{N - P(t)\} P(t), \quad (7)$$

ただし $P(t) + Q(t) = N$ を使った. これはまさにロジスティック方程式である. 普及率 $p(t) \equiv P(t)/N$ を使うのであれば以下の方程式になる.

$$\frac{dp(t)}{dt} = a \{1 - p(t)\} p(t), \quad (8)$$

この解は以下の通りである.

$$p(t) = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{1}{p(0)} - 1 \right\} e^{-at}}. \quad (9)$$

この様に即座にまねをする集団を考えると, その普及率の動的变化はロジスティック方程式で記述されることがわかった. もちろん, 「まね」が流行の伝搬には重要であることは, たとえば Ref. [10] などで言及されている. しかしこの様な導出方法によってより深い理解が可能となる.

パラメータ a ⁴ は普及率の時間変化を決定する. これは以下のように記述することが出来る:

$$a = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{N}{n^2} \frac{1}{\Delta t}. \quad (10)$$

N/n^2 は人口密度である. この値が大きくなると a も大きくなる, すなわち速く普及する. これはつまり混雑した社会ではよく人に出会うという単純な事実を反映している.

以上の議論を数値計算で確認しよう. つまり N 人のプレイヤーを $n \times n$ の格子上でランダムウォークさせその結果をみていく. その際境界条件は周期的にする.

⁴ coefficient of imitation と呼ばれている [19, 24, 25].

ここで、このシミュレーションは先で想定したものと異なり、至極単純であることを断っておく。つまり、1人の non-adopter は複数の adopter に出会う可能性が、まれではあるが有り得る。さらに n^2 は決して多くはない。そこで我々は 100 回異なる初期条件でシミュレーションを行い、アンサンブル平均をとり、そういった望ましくない出会いからの効果を少なくする。

$N = 25$ の場合の結果を Fig. 1 に円で示した。Fig. 1(a) と (b) はそれぞれ n が 25 と 18 である。曲線はフィッティング関数で、ロジスティック関数 $1/(1+e^{-a(t-b)})$ を使った。良く一致していることが見て取れる。フィッティングパラメータは Fig. 1(a) と (b) でそれぞれ $(a, b) = (0.0457, 56.4)$ と $(a, b) = (0.0921, 27.8)$ である。Fig. 1(b) での人口密度は (a) の約 2 倍であるが、これは a の比と同じであり、先の議論と無矛盾である。

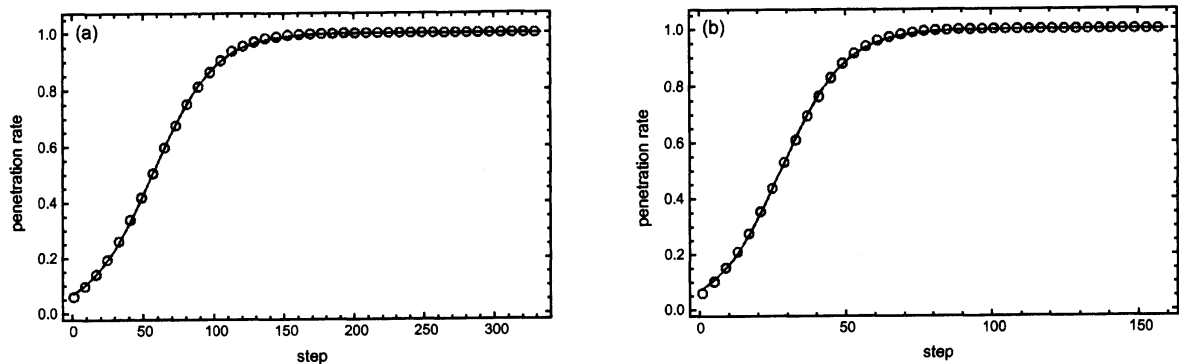


Figure 1. $n \times n$ 個の格子上の 25 人のランダムウォーカーの数値計算から得られた普及率の動的变化を円で示した: (a) $n = 25$; (b) $n = 18$. 曲線はロジスティック関数 $1/(1+e^{-a(t-b)})$.

3. 階層ロジスティック方程式

今まで普及率の動的变化に関する研究とは、adopter に non-adopter が会おうと影響を受けてまねをし、すぐにそのモノを持ち始める、というコミュニケーションを前提としていたことが、前節でわかった。ここで一つ疑問が生まれる:「我々はそんなに簡単に人から影響を受けるのだろうか」。これまでの研究では我々の行動の中で大事な要素が考えられていなかった。それは、今まで何人の adopter に出会ったかという記憶である。もちろんこれから流行するであろうモノが琴線に触れ、即座に手に入れる（まねをする）人もいだろう。しかし、たとえそのモノにそれ程興味がなくとも、多くの所持している人に出会うことで、それが流行しつつあることを感じ取り、流行に乗り遅れまいとして⁵ついには所持しだす。このような人々の行動も存在し、その蓄積の結果、普及率は変化すると私たちは考える。そこで先のまねするランダムウォーカーの集団に対して、non-adopter に内部構造（階層構造）を与える。つまり、残り μ 人に会ったらそのモノを所持し始める、 i 番目のステップにおける non-adopter の人数を Q_i^μ とする。この μ を remaining adopters number (RAN) と呼ぶことにする。それ以外のルール変えない。つまり non-adopter の種類は増えたが、彼ら同士の相互作用は考えない。すると、RAN が μ の人が adopter に出会えば、次のステップでは RAN は $\mu - 1$ になる。RAN の最大が m の集団に対しては、漸化式はこう変わる。

$$P_{i+1} = P_i + \frac{P_i}{n^2} Q_i^1 \quad (11)$$

$$Q_{i+1}^1 = Q_i^1 - \frac{P_i}{n^2} Q_i^1 + \frac{P_i}{n^2} Q_i^2 \quad (12)$$

⋮

$$Q_{i+1}^m = Q_i^m - \frac{P_i}{n^2} Q_i^m \quad (13)$$

⁵ あるいは、みんなが持っているからそのモノは信頼できるだろうという安心感が芽生えて。

これは先と同様の空間と時間の連続化によって以下の拡張されたロジスティック方程式になる.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{a}{N} Q^1(t) P(t) \quad (14)$$

$$\frac{dQ^1(t)}{dt} = -\frac{a}{N} P(t) Q^1(t) + \frac{a}{N} P(t) Q^2(t) \quad (15)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dQ^m(t)}{dt} = -\frac{a}{N} P(t) Q^m(t) \quad (16)$$

ただし $Q^\mu(t) = Q^\mu(i \cdot \Delta t) \equiv Q_i^\mu$ とした. この方程式を階層ロジスティック方程式と呼ぶことにする. もちろん $P(t) + Q^1(t) + \dots + Q^m(t) = N$ は常に満たされる.

Eq. (16) は簡単に解くことが出来, その解は

$$Q^m(t) = Q^m(0) \exp \left[-a \int_0^t dt' P(t') \right]. \quad (17)$$

となる. もし $Q^m(0) = 0$ ならば, $Q^m(t)$ はつねに 0 となる. したがって Q^{m-1} に対する Q^m の寄与はなくなる. さらに Q^{m-1} も同様に解くことが出来るので, もし $Q^m(0) = Q^{m-1}(0) = \dots = Q^2(0) = 0$ であるならば, 常に $Q^m(t) = Q^{m-1}(t) = \dots = Q^2(t) = 0$ が成り立つ. これはつまり階層ロジスティック方程式は通常のロジスティック方程式を包含していることを意味する.

もし普及率など全人口に対する割合 $p(t) \equiv P(t)/N$, $q^\mu(t) \equiv Q^\mu(t)/N$ を使えば, 階層ロジスティック方程式は

$$\frac{dp(t)}{dt} = a q^1(t) p(t) \quad (18)$$

$$\frac{dq^1(t)}{dt} = -a p(t) q^1(t) + a p(t) q^2(t) \quad (19)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dq^m(t)}{dt} = -a p(t) q^m(t) \quad (20)$$

となる.

4. iPod の売り上げデータのフィッティング

それでは階層ロジスティック方程式を使って実際のデータのフィッティングに応用してみよう. ここでは iPod の売り上げデータを採用する.

これは Apple 社のホームページから入手することが出来る. そこでは四半期ごとの売り上げが公表されている. 私たちは初めの売り上げを 2001 年の 11 月のものとして, それ以後を, 2002 年 2 月, 5 月, 8 月, \dots とした. それをグラフにしたものが Fig. 2 である. 見ての通り, 2005 年のピーク以降, たくさんのピークが存在する. 私たちのモデルは, 通常のロジスティック方程式と同様に, この様なたくさんの鋭いピークを説明することは不可能である⁶. 実際, これらのピークは 10 月から 12 月の売り上げなので, クリスマス用のプレゼントとしての影響であると考えられる. よって 2005 年のピークの後, 増加に転じるまで (つまり 2006 年 5 月まで) のデータを採用することとする.

2001 年 11 月を時間の原点とし, 売り上げを累積したデータを階層ロジスティック方程式でフィッティングした. フィッティングを行う際, 残差の絶対値の和, あるいは, 残差の 2 乗の和を最小にしようとしてしまうと, 売り上げの大きいところでのフィッティングを優先してしまい, 小さいところでの

⁶ しかしこれは階層ロジスティック方程式が 1 つのピークしか持たないことを意味していない. あるパラメータでは 2 つのピークを持つ場合がある.

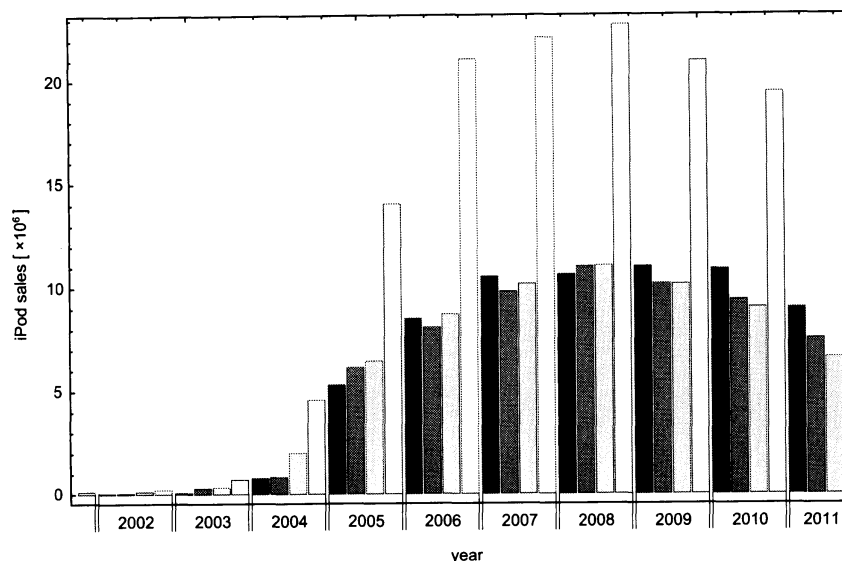


Figure 2. 四半期ごとの iPod の売り上げデータ. 各年, 色が同じバーは同じ四半期を意味し, 色が濃い順から, 2月, 5月, 8月, 11月を表している.

フィッティングをないがしろにしてしまう. 例として残差の絶対値の和を最小にした結果を Fig. 3 に示す. 売上高が大きいところではよくあっているが, 小さいところではズレが激しい. これはロジスティック方程式の特徴で, 成長率が $P(t)$ の関数となっており, 成長率を小さくするためには $P(t)$ も小さくせざるを得ないのである. その結果, ロジスティック関数は実データより下回っている. 別な言い方をすれば, iPod の売り上げの推移は, 初期はとてもゆっくりとしたものだったと言える.

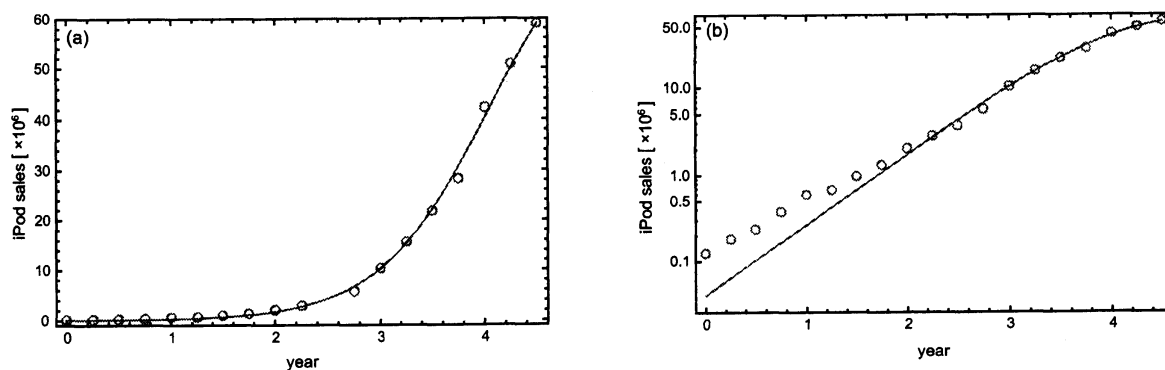


Figure 3. 2001 年 11 月を時間の原点とした iPod の累積売上げ (丸) とそれをフィッティングしたロジスティック関数.

そこで我々は誤差 (残差) の絶対値の和 (SAE) と相対誤差の絶対値の和 (SARE) の積を最小にするパラメータを採用することにする. 結果を Tab. 1 に示した. ただし第 1 列目だけは例外で, 比較のため SAE を最小にするパラメータを示している. 積と SARE は m の増加とともに減少している. また $m = 4$ での SARE は $m = 1$ のときに比べておよそ半分近くになっている. 言い換えれば, 1 つのデータあたりの平均相対誤差は, $m = 1$ では 9.7% だったものが, $m = 4$ では 5.3% まで減少している. つまり記憶を考慮した階層ロジスティック方程式の方が, よりよく実データを近似している.

比較のために, 決定係数 (R^2) を Tab. 1 に示してある. というのも普及率を分析している多くの

Table 1. SARE と SAE の積 (もしくは SAE だけ) を最小にするパラメータ, そのパラメータでの SARE と SAE の積, SARE, R^2 . すべて 3 桁に丸めているので, $p(0)$ と $p^\mu(0)$ の和は必ずしも 1 にならない.

	$m = 1$ (logistic)*	$m = 1$ (logistic)	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
a	1.89	1.43	4.42	4.25	4.17
$N [\times 10^6]$	83.7	1.28×10^5	64.6	65.4	66.2
$p(0)$	4.80×10^{-4}	9.26×10^{-7}	0.00207	0.00200	0.00189
$q^1(0)$	1.00	1.00	0.288	0.311	0.325
$q^2(0)$	—	—	0.710	0.675	0.657
$q^3(0)$	—	—	—	0.0125	0.00619
$q^4(0)$	—	—	—	—	0.00760
product	41.3	62.5	11.0	8.91	8.42
SARE	4.54	1.84	1.12	1.02	1.01
R^2	0.998	0.959	0.997	0.998	0.998

* このパラメータだけ例外で SAE を最小にする.

論文で, フィッティングのよさを定量的に表すために R^2 を使っているからである. しかし Tab. 1 から R^2 はフィッティングのよさを比較するにはふさわしくないことがわかる. なぜなら, ロジスティックモデルと $m = 4$ の階層ロジスティックモデルの R^2 はほぼ同じであるが, Fig. 4 に示した階層ロジスティックモデルの方が, Fig. 3 のロジスティックモデルよりもよくフィットしているのは明らかである.

$m = 4$ の結果から, 1 度目のピークを生み出した市場規模は約 6600 万人, 影響を受けやすい人の割合 ($q^1(0)$) は約 33%, 慎重な人の割合 ($q^2(0)$) は約 66%, 更に慎重な人の割合 ($q^3(0) + q^4(0)$) 約 1% であることが予想される. 比較のため, ロジスティック方程式と $m = 4$ の階層ロジスティック方程式を Fig. 4 に示した. ロジスティック方程式では表しきれない, 3 年以降の挙動が, $m = 4$ の場合ではうまく実データと一致していることがわかる.

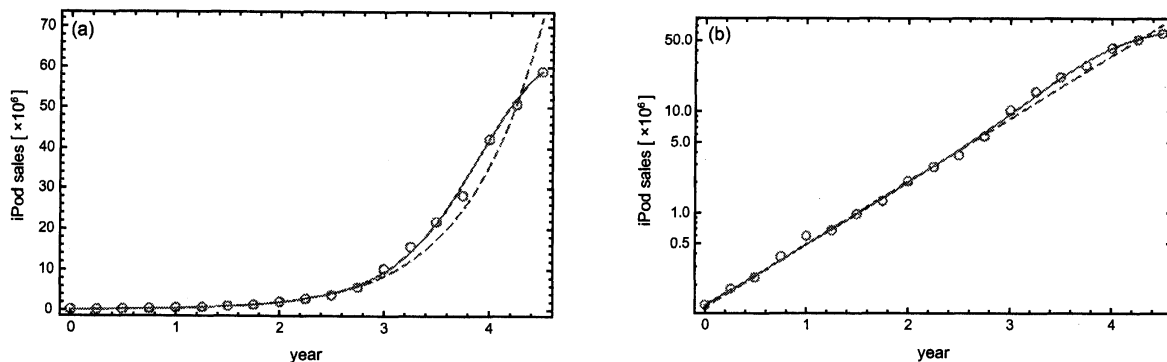


Figure 4. 2001 年 11 月を時間の原点とした iPod の累積売上げ (丸) とそれをフィッティングしたロジスティック関数 (破線) と $m = 4$ の階層ロジスティック方程式 (実線).

5. 結論

我々はこの論文で以下のことを明らかにした: i) ロジスティック関数で記述される普及率の動的変化の背後にある人と人とのコミュニケーションは, non-adopter は adopter に会おうとすぐにその

モノを持ち始める, という人まねである, ii) しかしそれは不自然なので, 影響を受ける人数を考慮した階層ロジスティック方程式を提案した iii) そのモデルを iPod の売り上げデータの説明に適用した. ロジスティック方程式よりもはるかに良い結果を得ることが出来た.

前節でふれた通り, ロジスティック関数は iPod の売り上げのようなゆっくりとした成長を記述するのには向かない. 我々は non-adopter に階層構造を持たせることで, adopter の数の遅い成長を表現している. 以前の研究で, こういったゆっくりとした成長を記述する拡張ロジスティック方程式が提案されたが, それは遅延時間を t_i を考え, $1 - \exp(-t/t_i)$ なる項を Eq. (1) の右辺に掛けたものである [26]. また, ロジスティック関数を θ 乗した非対称ロジスティックモデルも存在する [27]. $\theta > 1$ とすれば, ゆっくりとした成長を表現することが出来る. しかし私たちは, 流行が広まる上での大事なエッセンス (つまり記憶) を自然な形でロジスティック方程式に取り入れて拡張していることをここで強調しておく.

最後に今後の課題を述べて, 本論文の終わりとする. 私たちは, 流行の拡散において, まねをする, さらに記憶 (影響を受ける人数) が非常にエッセンスであることが明らかにした. しかし, これ以外にも, 例えば宣伝, 広告是非常に重要なファクターであることは何の疑いもない. ロジスティック方程式に広告の要素を取り入れたものに Bass モデルがある [28]. したがってこの仕事にのっとり, 階層 Bass モデルなるものを作らなければならない.

6. 謝辞

お茶の水女子大学の森川雅博教授, 宇宙物理研究室のメンバー, ならびに早稲田大学の田中友氏には有益な議論をして頂いたことをここに感謝します.

参考文献

- [1] Buchanan M 2007 *The Social Atom* (New York: Bloomsbury Press)
- [2] Rogers E M 1983 *Diffusion of Innovations, 3rd edition* (New York: Free Press) (青池慎一・宇野善康監訳 (1990) 『イノベーション普及学』産能大学出版部)
- [3] Tarde G 1903 *The Laws of Imitation* (New York: Holt) (池田祥英・村澤真保呂訳 (2007) 『模倣の法則』河出書房新社)
- [4] Verhulst P P 1838 *Corr. Math. Phys* **10** 113
- [5] Verhulst P P 1845 *Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belleslett* **18** 1
- [6] Verhulst P P 1847 *Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belleslett* **20** 1
- [7] Pearl R and Reed L 1920 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **6** 275
- [8] Lotka A J 1925 *Elements of Physical Biology* (Baltimore, MD.: Williams & Wilkins Co.)
- [9] Griliches Z 1957 *Econometrica* **25** 501
- [10] Mansfield E 1961 *Econometrica* **29** 741
- [11] Fisher J C and Pry R H 1971 *Technol. Forecast. Soc. Change* **2** 75
- [12] Gruber H and Verboven F 2001 *Eur. Econ. Rev.* **45** 577
- [13] Frank L D 2004 *Technol. Forecast. Soc. Change* **71** 391
- [14] Boretos G P 2007 *Technol. Forecast. Soc. Change* **74** 331
- [15] Liu X, Tanaka M and Matsui Y 2006 *Waste Manag. Res.* **24** 434
- [16] Yang Y and Williams E 2009 *Technol. Forecast. Soc. Change* **76** 1105
- [17] Dwivedy M and Mittal R K 2010 *Waste Manag.* **30** 2265
- [18] Yu J, Williams E, Ju M and Yang Y 2010 *Environ. Sci. Technol.* **44** 3232
- [19] Teng J T C, Grover V and Güttler W 2002 *IEEE Trans. on Eng. Manage.* **49** 13
- [20] Tasaki T, Oguchi M, Kaneyama T and Urano K 2001 *J. Jpn. Soc. Waste Manage. Experts* **12** 49
- [21] Yamasue E, Nakajima K, Okumura H and Ishihara K N 2006 *Mater. Trans.* **70** 611
- [22] Häfele W 1981 *Energy in a Finite World. A Global Systems Analysis* (USA: Ballinger Publishing Company)
- [23] Lund P 2006 *Energy Policy* **34** 3317
- [24] Kumar U and Kumar V 1992 *IEEE Trans. Eng. Manage.* **39** 158
- [25] Sultan F, Farley J U and Lehmann D R 1990 *J. of Mark. Res.* **27** 70
- [26] Wolf K H and Venus J 1992 *Acta Biotechnol.* **12** 405
- [27] Nelder J A 1961 *Biometrics* **17** 289
- [28] Bass F M 1969 *Manage. Sci.* **15** 215